

Total Pages : 16

[PPU-D-I-(Sub)-MATH]

Degree (Part-I) Examination, 2024

(Vocational)

MATHEMATICS

Paper Code : 140401

[Paper : First]

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 100

Note : Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable. The questions are of equal value. Answer **five** questions in all. **Question No. 1 is compulsory.** Besides this attempt at least **one** question from each section.

परीथार्थियों यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें। सभी प्रश्न समान अंक के हैं। कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। इसके अलावा प्रत्येक खंड से कम से कम से एक प्रश्न का उत्तर दीजिये।

140401/2510

(1)

Turn Over

1. Answer all the questions.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) In the group of non-zero rational numbers under the binary operation "*" given by $a * b = a + b + 1$, the inverse of 2 is :

- (a) -2
- (b) -1
- (c) -4
- (d) None of these

$a * b = a + b + 1$ द्वारा दिए गए बाइनरी ऑपरेशन "*" के तहत गैर-शून्य परिमेय संख्याओं के समूह में, 2 का व्युत्क्रम है :

- (a) -2
- (b) -1
- (c) -4
- (d) इनमें से कोई नहीं

(ii) If A, B and C are non-empty sets, then

$(A - B) \cup (B - A)$ is :

140401/2510

(2)

(a) $(A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $A - (A \cap B)$

(c) $(A \cap B) \cup (A \cup B)$

(d) $(A \cup B) - B$

यदि A, B और C गैर-रिक्त समुच्चय हैं, तो $(A - B) \cup (B - A)$ है :

(a) $(A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $A - (A \cap B)$

(c) $(A \cap B) \cup (A \cup B)$

(d) $(A \cup B) - B$

(iii) Suppose $S = \{1, 2, 3\}, T = \{1, 3, 5\}$ and $K = \{2, 3, 4, 5\}$, then which of the following is correct ?

(a) $S \cup T = \{1, 2, 3\}$

(b) $S \cup K = \{1, 2, 3, 4\}$

(c) $S \cap T = \{1, 2, 3\}$

(d) None of these

140401/2510

(3)

Turn Over

मान लीजिए $S = \{1, 2, 3\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ और $K = \{2, 3, 4, 5\}$, तो निम्नलिखित में से कौन-सा सही है ?

- (a) $S \cup T = \{1, 2, 3\}$
- (b) $S \cup K = \{1, 2, 3, 4\}$
- (c) $S \cap T = \{1, 2, 3\}$
- (d) इनमें से कोई नहीं

(iv) Which of the following are necessarily true ?

- (a) $|AB| > |A||B|$
- (b) $|AB| < |A||B|$
- (c) $|AB| = |A||B|$
- (d) None of these

निम्नलिखित में से कौन-सा आवश्यक रूप से सत्य है ?

- (a) $|AB| > |A||B|$
- (b) $|AB| < |A||B|$
- (c) $|AB| = |A||B|$
- (d) इनमें से कोई नहीं

(V) If $(1, \omega, \omega^2)$ is an abelian group under multiplication, then identity element is :

(a) 1

(b) 0

(c) -1

(d) ω

अगर $(1, \omega, \omega^2)$ गुणन के तहत एक एबेलियन समूह है, तो पहचान तत्व है :

(a) 1

(b) 0

(c) -1

(d) ω

(vi) Which one of them is not interval ?

(a) (1, 2)

(b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

(c) (3, π)

(d) (2 π , 180)

इनमें से कौन अंतराल नहीं है ?

(a) $(1, 2)$

(b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

(c) $(3, \pi)$

(d) $(2\pi, 180)$

(vii) If $A = \begin{bmatrix} 2 & x-3 & x-2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ is a symmetric

matrix, then $x =$

(a) 3

(b) 6

(c) 8

(d) 4

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & x-3 & x-2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है,

तो $x =$ **(6)**

140401/2510

(a) 3

(b) 6

(c) 8

(d) 4

(viii) The acute angle between the lines $x - 2 = 0$ and $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$ is :

(a) 0°

(b) 30°

(c) 45°

(d) 60°

रेखाओं $x - 2 = 0$ तथा $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$ के बीच का न्यून कोण है :

(a) 0°

(b) 30°

(c) 45°

(d) 60°

(ix) Let $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 \leq 7\}$, then supremum of A is :

- (a) 7
- (b) 3
- (c) Does not exist
- (d) 0

माना $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 \leq 7\}$, तो A का सर्वोच्च मूल्य है :

- (a) 7
- (b) 3
- (c) मौजूद नहीं
- (d) 0

(x) The conic $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ represents :

- (a) Hyperbola
- (b) Parabola
- (c) Ellipse
- (d) Circle

शंकु $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ दर्शाता है :

- (a) अतिपरवलय
- (b) परवलय
- (c) दीर्घवृत्त
- (d) वृत्त

Section-A / खण्ड-अ

2. (a) Define group and show that n th root of unity forms a group.

समूह को परिभाषित कीजिए तथा दर्शाइए कि इकाई का n वाँ मूल समूह बनाता है।

- (b) State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रेंज की प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए।

3. (a) Two finite sets have m and n elements, respectively. The total number of subsets of first set is 56 more than the total number of subsets of the second set. Find the values of m and n .

दो परिमित समुच्चयों में क्रमशः m और n अवयव हैं।

पहले समुच्चय के उपसमुच्चयों की कुल संख्या दूसरे समुच्चय के उपसमुच्चयों की कुल संख्या में 56 अधिक है। m और n के मान ज्ञात कीजिए।

(b) Let A, B and C be sets. Then show that $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

मान लीजिए कि A, B और C समुच्चय हैं। फिर दिखाइए कि $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ।

Section-B / खण्ड-ब

4. (a) Solve the following L.P.P. graphically :

Max. $Z = 3x + 5y$

Subject to $3x + 5y \leq 15$

$$5x + 2y \leq 10$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

निम्नलिखित को आलेखीय रूप से हल कीजिए :

अधिकतम $Z = 3x + 5y$

बाधाओं के अधीन $3x + 5y \leq 15$

$$5x + 2y \leq 10$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- (b) Solve the following L.P.P. using Simplex method :

Max. $Z = 40x + 30y$

Subject to $x + y \leq 12$

$$2x + y \leq 16$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

निम्नलिखित एल.पी.पी. को सिम्प्लेक्स विधि का उपयोग करके हल कीजिए :

अधिकतम $Z = 40x + 30y$

बाधाओं के अधीन $x + y \leq 12$

$$2x + y \leq 16$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

5. (a) Show that every square matrix can uniquely be expressed as a sum of symmetric and skew-symmetric matrix.

दिखाइए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को विशिष्ट रूप से सममित और तिरछा-सममित मैट्रिक्स के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, then find $A^2 + 2A + 7I$.

अगर $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A^2 + 2A + 7I$ खोजें।

Section-C / खण्ड-स

6. (a) Prove that the subsequence of a convergent sequence is also convergent.

सिद्ध कीजिए कि अभिसारी अनुक्रम का अनुगमन भी अभिसारी होता है।

- (b) Discuss the convergence of the series $\sum \frac{1}{n^p}$.

श्रृंखला $\sum \frac{1}{n^p}$ के अभिसरण पर चर्चा कीजिए।

7. (a) If $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$, then prove that

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \beta} + \frac{y^2}{\sinh^2 \beta} = 1 \text{ and } \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = 1.$$

अगर $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \beta} + \frac{y^2}{\sinh^2 \beta} = 1 \text{ तथा } \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = 1.$$

- (b) Resolve $\tan^{-1}(\cos \theta + i \sin \theta)$ into its real and imaginary parts.

$\tan^{-1}(\cos \theta + i \sin \theta)$ को उसके वास्तविक और काल्पनिक भागों में हल कीजिए।

8. (a) Simplify :

(i) $(\sqrt{3} + i)^{18}$

(ii) $(1 - \sqrt{3}i)^{23}$

सरल कीजिए :

(i) $(\sqrt{3} + i)^{18}$

(ii) $(1 - \sqrt{3}i)^{23}$

- (b) Prove the following :

(i) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(ii) $\cosh 2x = 2(\cosh x)^2 - 1$

निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

(i) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(ii) $\cosh 2x = 2(\cosh x)^2 - 1$

Section-D / खण्ड-द

9. (a) Find the angle between the lines

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-1} \text{ and}$$

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-1} \text{ और}$$

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

- (b) Find the equation of the plane which contains

the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ and the plane

$$x + 2y + z = 12.$$

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें रेखा है

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4} \text{ और समतल}$$

$$x + 2y + z = 12.$$

10. (a) Trace the conic

$$3(3x - 2y + 4)^2 + 2(2x + 3y - 5)^2 = 39.$$

शंकु $3(3x - 2y + 4)^2 + 2(2x + 3y - 5)^2 = 39$
को ट्रेस कीजिए।

(b) Find the co-ordinates of the focus and equation to its directrix of the parabola

$$9x^2 + 24xy + 16 + y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$$

परवलय

$9x^2 + 24xy + 16 + y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$ की
अपनी दिशा के लिए फोकस और समीकरण के निर्देशांक
खोजिए।

THE END